

Aufgabe 13

a) Für achsennahe Strahlen gilt $l = s$ und somit:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{1}{R} \left(n_2 \frac{s_2}{l_2} - n_1 \frac{s_1}{l_1} \right) \\ \frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{1}{R} \left(n_2 \frac{l_2}{l_2} - n_1 \frac{l_1}{l_1} \right) \\ \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} &= \frac{1}{R} (n_2 - n_1) \end{aligned}$$

b) Es gelten folgende Bezeichnung:

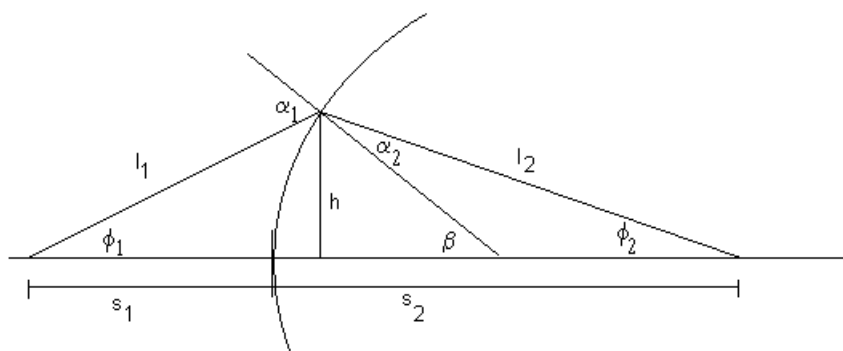


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 13 b)

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \phi_1 + \beta \\ \alpha_1 &= \beta - \phi_2 \end{aligned}$$

Aus Snellius und den Additionstheoremen folgt:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \alpha_1 &= n_2 \sin \alpha_2 \\ n_1 \sin(\phi_1 + \beta) &= n_2 \sin(\beta - \phi_2) \\ n_1 \sin \left(\arcsin \frac{h}{l_1} + \arcsin \frac{h}{R} \right) &= n_2 \sin \left(\arcsin \frac{h}{R} - \arcsin \frac{h}{l_2} \right) \\ n_1 \frac{h}{l_1} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} + n_1 \frac{h}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_1^2}} &= n_2 \frac{h}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}} - n_2 \frac{h}{l_2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \\ n_1 \frac{1}{l_1} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} + n_2 \frac{1}{l_2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} &= n_2 \frac{1}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}} - n_1 \frac{1}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_1^2}} \\ \frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{n_2 \frac{1}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}} - n_1 \frac{1}{R} \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}} \\ \frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{n_2}{l_2} \sqrt{\frac{l_2^2 + h^2}{R^2 + h^2}} - \frac{n_1}{l_1} \sqrt{\frac{l_1^2 + h^2}{R^2 + h^2}} \end{aligned}$$

Mit der Taylerentwicklung (Grad 2) nach h folgt:

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{n_2}{R} \left(1 + \frac{R^2 - l_2^2}{2R^2 l_2^2} h^2 \right) - \frac{n_1}{R} \left(1 + \frac{R^2 - l_1^2}{2R^2 l_1^2} h^2 \right)$$

Die zusätzlichen Terme sind quadratisch in h , da nach h entwickelt wurde.