

# Praktikum MI

## Mikroskop

Florian Jessen (Theorie)  
Hanno Rein (Auswertung)

betreut durch Christoph von Cube

16. Januar 2004

## 1 Vorwort

Da der Mensch mit seinen Augen nur Objekte bestimmter Größe wahrnehmen kann, hat er im Laufe der Zeit Geräte entwickelt, mit Hilfe derer er noch kleinere Objekte beobachten kann. Ein bekanntes Gerät ist das Lichtmikroskop.

## 2 Physikalische Grundlagen

### 2.1 Linsenanordnungen

#### 2.1.1 Vergrößerung

Der Begriff der Vergrößerung ist definiert als

$$v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

wobei  $\varepsilon$  den Winkel bezeichnet, unter dem das Objekt durch die Linsenanordnung zu sehen ist, und  $\varepsilon_0$  den Winkel, unter dem das Objekt in der deutlichen Sehweite ohne Linsen zu erkennen ist. Die deutliche Sehweite beträgt  $s_0 = 25\text{cm}$  und ist per Definition die Entfernung, in der wir Gegenstände noch ohne zu große Ermüdung des Auges (durch starker Akkomodation der Augenlinse) scharf sehen.

- Lupe

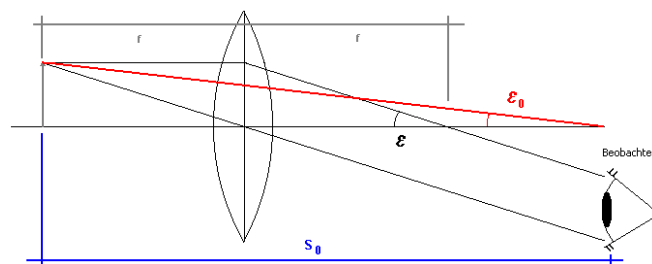


Abbildung 1: Strahlengang Lupe

Bei der Lupe lässt sich die Vergrößerung nicht nur experimentell, sondern auch aus den geometrischen Daten ermitteln. Es ist

$$v_{Lupe} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{G}{F} \cdot \frac{s_0}{G} = \frac{s_0}{f} \quad (2)$$

Mit einer Lupe lassen sich so Vergrößerungen bis etwa zum 20- bis 30-fachen erzielen.

- **Mikroskop**

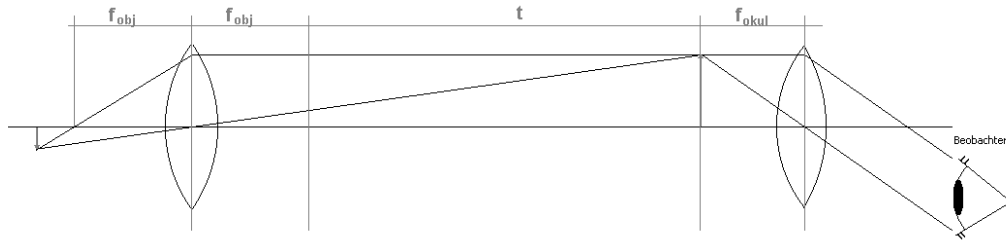


Abbildung 2: Strahlengang Mikroskop

Beim Mikroskop lässt sich die Vergrößerung ebenfalls aus den geometrischen Daten bestimmen. Der prinzipielle Unterschied besteht darin, dass mit der Lupe (Okularlinse) nicht das Objekt, sondern ein Zwischenbild betrachtet wird. Die Vergrößerung der Objektivlinse ergibt sich durch

$$v_{Obj} = \frac{t}{f_{Obj}} \quad (3)$$

Die Gesamtvergrößerung erhält man durch Multiplikation.

$$v_{Mikroskop} = v_{Obj} v_{Okul} = \frac{t \cdot s_0}{f_{Obj} \cdot f_{Okul}} \quad (4)$$

### 2.1.2 Numerische Apertur

Die numerische Apertur  $A$  ist ein Maß für das Auflösungsvermögen eines Objektivs. Sie ist definiert als

$$A = n \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

Hierbei ist  $n$  der Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv.

## 2.2 Physikalische Grenzen

Auch mit einem idealen Mikroskop lassen sich nicht beliebig kleine Strukturen betrachten. Die mögliche Auflösbarkeit hängt von vielen Faktoren ab. Ein wesentlicher ist die Beugung an Blenden und den Linsen. Dabei ist zu beachten, dass die Linsen in der Regel durch Kreise begrenzt werden. Verschiedene Physiker haben sich darüber Gedanken gemacht. Besonders bekannt sind in diesem Zusammenhang die Namen helmholtz und Abbe.

- **Helmholtz**

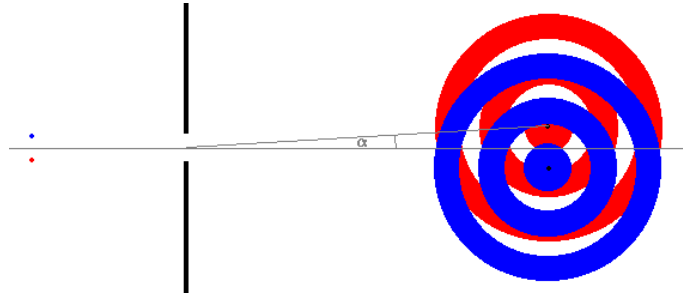
Helmholtz geht davon aus, dass alle Körper angestrahlt werden. Das dann reflektierte Licht wird an allen Öffnungen gebeugt, so auch an den Linseneinfassungen. Die Folge ist, dass jedes punktförmige Objekt immer als kleines Scheibchen innerhalb eines kreisförmigen Interferenzmusters abgebildet wird. Damit zwei Scheibchen noch getrennt wahrgenommen werden können, darf das Maximum des einen höchstens in das erste Minimum des anderen fallen. Für kreisförmige Öffnungen gilt - anders als beim Einzelspalt - für den Abstand des Minimum erster Ordnung vom Hauptmaximum

$$\sin \alpha = \frac{1,22\lambda}{2r} \quad (6)$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{2f} \quad (7)$$

Dabei ist  $r$  der Radius der Lochblende beziehungsweise der Linseneinfassung,  $f$  die Brennweite und  $\Delta x$  der Abstand der Mittelpunkte in der Brennebene. Es ist daher näherungsweise

$$\Delta x = \frac{1,22f\lambda}{r} = 1,22 \frac{\lambda}{A} \quad (8)$$



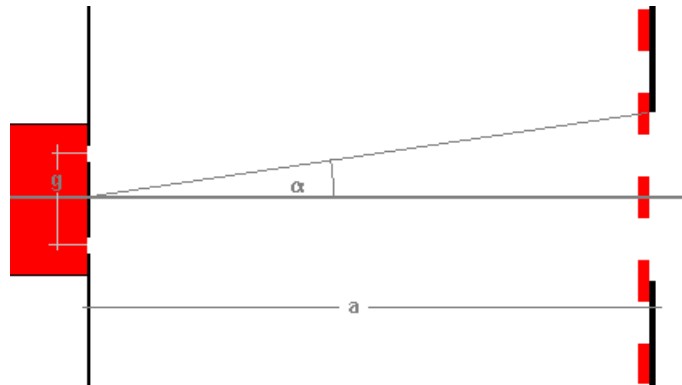
Auflösungsbedingung nach Helmholtz

- Abbe

Anders als Helmholtz geht Abbe davon aus, dass die Körper selbst Licht abstrahlen. Dies lässt sich mit einem Doppelspalt realisieren und man beobachtet ein Interferenzmuster. Tritt nur das Maximum nullter Ordnung in die Linse ein, so können keine Strukturen wahrgenommen werden, sondern alles erscheint gleichmäßig beleuchtet. Treten auch höhere Ordnungen ein, so können Strukturen aufgelöst werden. Damit dieser Fall eintritt, muss gemäß der Bedingungen am Doppelspalt

$$g = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (9)$$

gelten. Dabei ist  $g$  die Gitterkonstante und  $\alpha$  der Winkel des ersten Maximums mit der optischen Achse.



Auflösungsbedingung nach Abbe

### 3 Auswertung

#### 3.1 Vergrößerung des Mikroskops

Schaut man durch das Mikroskop, so sieht man unter dem Winkel  $\epsilon$  eine gewisse Strecke  $l_m$  dem Objekt. Schaut man gleichzeitig mit dem anderen Auge auf den Objektstisch, so sieht man unter dem gleichen Winkel  $\epsilon$  eine größere Strecke  $l_r$ . Das Verhältnis der beiden Strecken entspricht gerade der Vergrößerung des Mikroskops.

Objektiv	blau	gelb	blau	gelb
Vergrößerung Okular	$v_{ok1} = 10$	$v_{ok1} = 10$	$v_{ok2} = 6$	$v_{ok2} = 6$
gesehene Strecke unter Winkel $\epsilon$ im Mikroskop [mm]	$l_{m1} = 0.05$	$l_{m2} = 0.25$	$l_{m3} = 0.05$	$l_{m4} = 0.25$
gesehene Strecke unter Winkel $\epsilon$ ohne Mikroskop [mm]	$l_{r1} = 16$	$l_{r2} = 22$	$l_{r3} = 9$	$l_{r4} = 12$
Vergrößerung gesamtes Mikroskop $v = \frac{l_r}{l_m}$	$v_1 = 320$	$v_2 = 88$	$v_3 = 180$	$v_4 = 48$
Vergrößerung Objektiv $v_{ob} = \frac{v}{v_{ok}}$	$v_{blau1} = 32$	$v_{gelb1} = 9$	$v_{blau2} = 30$	$v_{gelb2} = 8$

Die ermittelten Werte sind vermutlich mit hohen Fehlern belastet, da das Messverfahren stark von dem Praktikant, der diesen Versuch durchführt, abhängen.

### 3.2 Aperturwinkel

Sei  $m$  der sichtbare Bereich der Skala, und  $h$  die Höhe zwischen Tischoberkante und Tubus. Somit gilt für den Aperturwinkel  $\alpha$

$$\alpha = \arctan \frac{m}{2h} \quad (10)$$

Daraus ergibt sich die numerische Apertur  $A$  nach Formel (5). Der Brechungsindex  $n$  von Luft ist in guter Näherung  $n_{Luft} = 1$ . Die mittlere Wellenlänge des Lichts ist  $\lambda = 500$  nm. Somit ergibt sich nach Gleichung (8) für die kleinste Struktur  $\Delta x$  die mit dem Objektiv aufgelöst werden kann:

$$\Delta \bar{x} = 1.22 \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (11)$$

Der zufällige Fehler errechnet sich durch die Gausssche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta \sigma_x = \left| 1.22 \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \bar{\alpha}}{(\sin^2 \bar{\alpha})} \cdot \sigma_\alpha \right| \quad (12)$$

blaues Objektiv	gelbes Objektiv
$\bar{\alpha}_{blau} = 0.321$	$\bar{\alpha}_{gelb} = 0.211$
$\sigma_{\alpha,blau} = 0.023$	$\sigma_{\alpha,gelb} = 0.005$
$A_{blau} = 0.315$	$A_{gelb} = 0.209$
$\Delta \bar{x}_{blau} = 1.94 \cdot 10^{-6}$ m	$\Delta \bar{x}_{gelb} = 2.92 \cdot 10^{-6}$ m
$\Delta \sigma_{x,blau} = 0.14 \cdot 10^{-6}$ m	$\Delta \sigma_{x,gelb} = 0.07 \cdot 10^{-6}$ m

Die Auflösung dieses Mikroskops (Objektivs) ist also auf Strukturen begrenzt, die größer sind als  $1.94 \cdot 10^{-6}$  m, bzw  $2.92 \cdot 10^{-6}$  m.

### 3.3 Spalttrümmerspuren

Die Länge  $l_1$  der Spalttrümmerspuren ist nach unseren Messwerten

$$l_1 = (93 \pm 23) \mu\text{m} \quad (13)$$

Da die Trümmer unter einem Winkel von  $20^\circ$  in die Folie eintreten erscheinen die Spuren in der Aufsicht verkürzt. Die tatsächliche Länge  $l_2$  beträgt

$$l_2 = l_1 \cdot \frac{1}{\cos 20^\circ} \quad (14)$$

$$= (99 \pm 25) \mu\text{m} \quad (15)$$

Durch die Energie-Reichweite-Beziehung kann man auf die Anfangsenergie der Trümmer zurückschließen:

$$E = \left( \frac{l_2}{a_{Folie}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (16)$$

$$= l^{\frac{3}{2}} \cdot 1.191 \frac{\text{MeV}}{(\mu\text{m})^{\frac{3}{2}}} \quad (17)$$

Der zufällige Fehler ergibt sich aus der Gausschen Fehlerfortpflanzung:

$$\sigma_E = \sigma_l \cdot \frac{3}{2} \cdot (\bar{l})^{\frac{1}{2}} \cdot 1.191 \frac{\text{MeV}}{(\mu\text{m})^{\frac{3}{2}}} \quad (18)$$

Somit ist die Energie der Trümmer vor dem Abbremsen durch die Plastikfolie

$$E = (1\,165 \pm 295) \text{ MeV} \quad (19)$$

$$= (1.87 \cdot 10^{-10} \pm 0.47 \cdot 10^{-10}) \text{ J} \quad (20)$$

Die Geschwindigkeit vor dem Abbremsen ist

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m_t}} \quad (21)$$

Der Fehler der Geschwindigkeit ist wiederum mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu berechnen:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot E \cdot m_t}} \cdot \sigma_E \quad (22)$$

Da ein Trümmerstück laut Anleitung aus 124 Nukleonen besteht, ist die Gesamtmasse  $m_t$  der Trümmer

$$m_t = 124 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (23)$$

Die Trümmer hatten also eine Geschwindigkeit von

$$v = (4.25 \cdot 10^7 \pm 0.54 \cdot 10^7) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (24)$$

Auf relativistische Rechnung wurde verzichtet; der tatsächliche Wert dürfte daher geringer sein. Die hier gemessenen Geschwindigkeiten liegen aber dennoch in der Größenordnung der Geschwindigkeiten, die heutzutage in Beschleunigern erreicht werden. Die kinetische Energie von  $\alpha$  Strahlung liegt im Bereich einiger MeV. Berücksichtigt man, dass hier wesentlich schwerere Bruchstücke verwendet wurden und der Zerfall nicht immer in gleich schwere Stücke erfolgt, so kann man doch davon ausgehen, dass keine groben Messfehler unterlaufen sind. So kann man auch den relativ hohen Fehler von etwa 25 Prozent erklären.

## Anhang: Original-Messdaten

- **Vergößerung**

siehe Auswertung 3.1

- **Aperturwinkel**

*Objektiv 1*

h	m
21.5 mm	13.5 mm
25 mm	16 mm
27 mm	20 mm
21 mm	13 mm
23 mm	16 mm

*Objektiv 2*

h	m
21.5 mm	9.5 mm
25 mm	10.5 mm
27 mm	11.2 mm
21 mm	9 mm
23 mm	10 mm

- **Spalttrümmerspuren**

Eichung der Skalen:

1 Strich Objektmikrometer (0.05 mm)  $\hat{=}$  1.35 Einheiten Okularmikrometer

Länge der Trümmerspuren:

111.111  $\mu\text{m}$ , 148.148  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 111.111  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 92.5925  $\mu\text{m}$ ,  
111.111  $\mu\text{m}$ , 92.5925  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 111.111  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 111.111  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ ,  
74.074  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 111.111  $\mu\text{m}$ , 74.074  $\mu\text{m}$ , 148.148  $\mu\text{m}$ , 111.111  $\mu\text{m}$ ,  
111.111  $\mu\text{m}$ .