

Praktikum II
AG: Auflösungsvermögen von Prisma und Gitter
Betreuer: Norbert Lages

Hanno Rein
praktikum2@hanno-rein.de

Florian Jessen
florian.jessen@student.uni-tuebingen.de

16. April 2004

1 Vorwort

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Licht spektral zu zerlegen. Interessant ist hierbei das Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, das angibt ob verschiedene Linien eines Spektrums noch zerlegt werden können. In diesem Versuch soll das Auflösungsvermögen bei einem Prisma und einem Gitter untersucht werden.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Auflösungsvermögen

2.1.1 Gitter

Beim Gitter gilt für die Lage der Hauptmaxima

$$\sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{g} \quad (1)$$

$$\tan \alpha_k = \frac{d_k}{a} \quad (2)$$

Damit zwei Wellenlängen bei der Gitterbeugung noch getrennt wahrgenommen werden können, muss das Maximum der einen mindestens in das Minimum der anderen fallen, oder weiter entfernt sein. Für den Abstand zweier benachbarter Maxima der gleichen Wellenlänge gilt

$$\Delta d_k = d_{k+1} - d_k \quad (3)$$

$$= a \cdot \tan \arcsin \alpha_{k+1} - a \cdot \tan \arcsin \alpha_k \quad (4)$$

Unter der Annahme, dass die Minima gleichmäßig über diese Breite Δd_k mit N Spalten verteilt sind, muss daher gelten

$$\frac{\Delta d_k}{N} < d_{k,\lambda+\Delta\lambda} - d_{k,\lambda} \quad (5)$$

$$< a \cdot \tan \arcsin \frac{k \cdot (\lambda + \Delta\lambda)}{g} - a \cdot \tan \arcsin \frac{k\lambda}{g} \quad (6)$$

Näherungsweise kann $\sin \alpha = \tan \alpha$ gesetzt werden. Es ist dann

$$\frac{a\lambda}{Ng} < a \cdot \frac{k \cdot (\lambda + \Delta\lambda)}{g} - a \cdot \frac{k\lambda}{g} \quad (7)$$

$$kN < \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (8)$$

Diese Gleichung enthält Größen, die im Versuch nur schwer bestimmt werden können. Sie lässt sich aber auch so umformen, dass andere leichter zu bestimmende Werte eingesetzt werden müssen. Es ist aufgrund geometrischer Überlegungen

$$\cos \varphi = \frac{B}{a} \quad (9)$$

$$N \cdot g = a \quad (10)$$

wobei φ den Winkel zwischen Maximum und benachbartem Minimum bezeichnet, B die Strahlbreite und b die effektive Breite des Gitters. Aus (1) erhält man eine Beziehung für k . So ergibt sich insgesamt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{B}{g \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{g \cdot \sin \varphi}{\lambda} \quad (11)$$

$$= \frac{B \cdot \sin \varphi}{\lambda \cdot \cos \varphi} \quad (12)$$

$$= \frac{B}{\lambda} \cdot \tan \varphi \quad (13)$$

2.1.2 Prisma

Beim Prisma entsteht das Spektrum dadurch, dass der Brechungsindex n des Prismas von der Wellenlänge λ abhängt. Blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes. Hinzu kommt allerdings noch das Einzelspaltinterferenzmuster, das durch das Prisma zwangsläufig entsteht. Dadurch ist das Auflösungsvermögen des Prismas beschränkt. Um zwei Wellenlängen λ_1 und $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ noch auflösen zu können, muss das 1. Minimum der einen Wellenlänge in das Hauptmaximum der anderen fallen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn gilt:

$$\lambda_1 = B \cdot \sin \epsilon \quad . \quad (14)$$

Hierbei ist B die Spaltbreite und ϵ der Winkel unter dem die beiden Wellenlängen erscheinen. Somit gilt für das Auflösungsvermögen des Prismas

$$\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = B \cdot \frac{\sin \epsilon}{\Delta\lambda} \quad . \quad (15)$$

Für kleine Winkel kann die Kleinwinkelnäherung ($\sin \epsilon = \epsilon$) benutzt werden. Man erhält also

$$\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = B \cdot \frac{\epsilon}{\Delta\lambda} \quad . \quad (16)$$

2.2 Justierung

Nachdem das Fernrohr im unendlichen scharf gestellt wurde, und man den Spalt ohne Prisma scharf sehen konnte, begann die Suche nach den Spektrallinien. Die Suche verlief eine hinreichend große Zeitspanne T erfolglos. Bei $T = 45$ min erschienen die erhofften Linien und wir begannen mit der Messung.

3 Auswertung

3.1 Prisma

Der gemessene Winkel ϵ_1 zwischen der gelben Hg-Linie (579.1 nm) und der grünen Hg-Linie (546.3 nm) beträgt

$$\epsilon_1 = (0.225 \pm 0.014)^\circ \quad (17)$$

Um den eigentlich gesuchten Winkel ϵ_2 zwischen den beiden gelben Linien zu bestimmen, ergab unsere Abschätzung für das Verhältnis χ des Winkels ϵ_1 zu ϵ_2 etwa 13. Die Theorie liefert

$$\chi_{th} = \frac{579.1 \text{ nm} - 546.3 \text{ nm}}{579.1 \text{ nm} - 577.0 \text{ nm}} \quad (18)$$

$$= 15.6 \quad . \quad (19)$$

Somit ist

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{\chi} \quad (20)$$

$$= (0.014 \pm 0.001)^\circ \quad . \quad (21)$$

Aus den Messwerten ergeben sich die für die Spaltbreite B , sowie deren Fehler

trennbar [mm]	nicht trennbar [mm]	Mittelwert incl offset	Mittelwert effektiv	$\frac{\lambda}{\delta\lambda}$	Fehler
3.78	2.51	3.15	1.32	157.63	0.66
3.11	2.19	2.65	0.82	98.29	0.41
3.79	2.31	3.05	1.22	146.24	0.61
3.87	2.14	3.01	1.18	140.85	0.59
3.17	2.27	2.72	0.89	106.69	0.45

Tabelle 1: Spaltbreiten Prisma

Damit ergibt sich als Mittelwert für das Auflösungsvermögen

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right)_{\text{Messung}} = 129.94 \pm 0.54 \quad . \quad (22)$$

Um die Doppellinien zu trennen benötigt man das Auflösungsvermögen

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right)_{\text{Theorie, Hg}} = \frac{578 \text{ nm}}{2.1 \text{ nm}} \quad (23)$$

$$= 275.2 \quad (24)$$

Unsere Messung liegt unterhalb des theoretischen Werts. Dies ist auch logisch, da durch sonstige Randeffekte (Beugung an Linsen, sonstige Linsenfehler, ...) das Auflösungsvermögen verschlechtert wird.

3.2 Gitter

Aus den Messwerten ergeben sich die für die Spaltbreite B , sowie deren Fehler

Ordnung		Spaltbreite [mm]	Fehler der Spaltbreite [mm]
1. rechts	gerade noch trennbar	$B_3 = 2.98$	$\delta B_3 = 0.06$
	gerade nicht mehr trennbar	$B_4 = 2.52$	$\delta B_4 = 0.03$
1. links	gerade noch trennbar	$B_5 = 2.18$	$\delta B_5 = 0.06$
	gerade nicht mehr trennbar	$B_6 = 1.6$	$\delta B_6 = 0.10$
3. links	gerade noch trennbar	$B_7 = 2.18$	$\delta B_7 = 0.07$
	gerade nicht mehr trennbar	$B_8 = 1.79$	$\delta B_8 = 0.02$

Tabelle 2: Spaltbreiten Gitter

Die Winkel zwischen Hauptmaxima und den Nebenmaxima der gelben Linien sind

Ordnung	Winkel [°]
0	0
1. rechts	3.6
1. links	3
3. links	9.7

Tabelle 3: Winkel Gitter

Bei der Winkelmessung nehmen wir einen Fehler von $\delta\varphi = 0.04$ an. Nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung und Gleichung (13) ergibt sich für das Auflösungsvermögen

Ordnung	Auflösungsvermögen $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$
1. rechts	[(274 ± 175) , (324 ± 207)]
1. links	[(145 ± 111) , (198 ± 152)]
3. links	[(529 ± 128) , (646 ± 156)]

Tabelle 4: Auflösungsvermögen Gitter

Die starken Abweichungen der einzelnen Werte untereinander, sowie vom theoretischen Wert und die großen Fehler zeigen die zurückbleibende Unsicherheit bei dieser Messung.

Anhang - Original Messdaten

Versuchsordnung C751

Spalt ist geschlossen bei 1.83 mm

Prisma

gerade noch trennbar [mm]	3.78	3.11	3.79	3.87	3.17
nicht mehr trennbar [mm]	2.51	2.19	2.31	2.14	2.27

Tabelle 5: Spaltbreiten Prisma

Winkel 1 [°]	Winkel 2 [°]
36.75	36.50
36.75	36.50
36.60	36.40
36.60	36.40

Tabelle 6: Winkelmessung Prisma

Gitter

1. Ordnung rechts	gerade noch trennbar [mm]	4.83	4.73	4.63	4.90	4.96
	nicht mehr trennbar [mm]	4.39	4.27	4.27	4.41	4.41
1. Ordnung links	gerade noch trennbar [mm]	4.11	4.13	4.07	3.98	3.87
	nicht mehr trennbar [mm]	3.24	3.60	3.32	3.58	3.23
3. Ordnung links	gerade noch trennbar [mm]	4.00	4.02	4.02	4.01	4.00
	nicht mehr trennbar [mm]	3.59	3.62	3.65	3.65	3.66

Tabelle 7: Spaltbreiten Gitter

Ordnung	Winkel [°]
0.	292.5
1. links	295.5
1. rechts	288.9
3. links	302.2

Tabelle 8: Winkelmessung Gitter